



مسابقه ریاضی دانشجویی
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
موضوع امتحان: ترکیبیات

مدت امتحان : ۲ ساعت

تاریخ: ۸۳/۱۱/۲۹

بارم هر سؤال ۱۰ نمره است.

سؤال (۱) در یک جمع n نفره، فردی وجود دارد که تمامی $n - 1$ نفر دیگر را می‌شناسد اما هیچ فرد دیگری او را نمی‌شناسد («توجه کنید که رابطهٔ آشنایی، دوطرفه نیست»). یک کارآگاه تصمیم دارد که این شخص را شناسایی کند. او هر بار می‌تواند دو نفر a و b را انتخاب کرده و از شخص a بپرسد که آیا شخص b را می‌شناسد یا نه. او با حداقل چند سؤال می‌تواند شخصی که بقیه را می‌شناسد و دیگران او را نمی‌شناسند، بیابد؟

سؤال (۲) فرض کنید G یک گراف همبند باشد. گراف T_G را به این صورت می‌سازیم: رؤوس T_G عبارتند از همهٔ زیردرختهای فراگیر G ، و دو رأس از T_G به هم وصل هستند اگر و تنها اگر زیردرختهای متناظر با آن دو رأس، دقیقاً در یک یال اختلاف داشته باشند. اثبات یا رد کنید: T_G همیشه همبند است.

سؤال (۳) دنبالهٔ A_1, A_2, A_3, \dots به این ترتیب ساخته می‌شوند (هر A_i خود دنباله‌ای از اعداد طبیعی می‌باشد):

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= 12 \\ A_3 &= 1123 \\ A_4 &= 11121234 \\ A_5 &= 1111211212312345 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

در واقع در هر گام، A_{i+1} را از روی A_i به ترتیب زیر می‌سازیم: هر عضو A_i مانند a را برمی‌داریم و به جای آن $a \dots a$ را قرار می‌دهیم و در انتهای A_{i+1} هم عضو $i + 1$ را می‌گذاریم. اثبات یا رد کنید: به ازای هر عدد طبیعی m ، اگر A_n یک دنبالهٔ m -تایی از اعداد طبیعی به صورت $A_n = a_1 a_2 \dots a_m$ باشد، آنگاه به ازای هر $1 \leq i \leq m$ دقیقاً یکی از اعداد a_i و یا a_{m+1-i} برابر ۱ است.