بسمه تعالی

مسابقه ریاضی دانشجویی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ: ۱۳۸۵/۱۱/۲۵ | مدت امتحان: ۴ ساعت

۱) فرض کنید $f : (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ تابعی پیوسته باشد که در خواص زیر صدق می‌کند.

i) برای هر $x, y > 0$ $\quad f(x y) \leq f(x)y^{\alpha} + f(y)$.

ii) برای هر $x > 0$ $\quad x^{\alpha} f(x^{-1}) = f(x)$.

iii) $f(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 1$.

ثابت کنید عدد ثابت $c > 0$ وجود دارد که برای هر x: $f(x) \leq c\ \ max(1, x^{\alpha})$.

۲) فرض کنید R یک حلقه نه لزوماً یکدار باشد و $D(R)$ مجموعه همه عناصری مثل $a \in R$ باشد چنانکه دو عنصر ناصفر a' و a'' موجودند که $aa' = a''a = 0$.
ثابت کنید اگر $1 < |D(R)| < \infty$ آنگاه R حلقه‌ای متناهی است.
(مقصود از $|A|$ تعداد اعضای مجموعه A میباشد.)

۳) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که دقیقاً n درایه آن برابر ۱ و بقیه درایه‌ها صفر هستند. همچنین S_r را مجموع همه $\binom{n}{r}$ زیر دترمینان $r \times r$ اصلی A بگیرید.
ثابت کنید رابطه $S_r = \binom{n}{r}$ برای یک عدد صحیح $1 \leq r < n$ برقرار است اگر و فقط اگر A ماتریس همانی $n \times n$ باشد.

۴) ماتریس $A \in M_n(Q)$ جادوئی نامیده میشود اگر مجموع درایه های هر سطر، هر ستون، قطر اصلی و قطر فرعی همگی برابر عدد ثابتی مانند $\sigma(A)$ باشد. ثابت کنید اگر $A \in M_3(Q)$ جادویی باشد، آنگاه برای هر عدد فرد $p \geq 1$، ماتریس A^p نیز جادویی است.

۵) نشان دهید معادله درجه چهار $z^4 - 2cz^3 + 2\bar{c}z - 1 = 0$ که در آن c عدد مختلطی با مزدوج $\bar{c}$ است ریشه‌ای خارج دایره واحد $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ دارد اگر و فقط اگر $(Re\ \ c)^{\frac{2}{3}} + (Im\ \ c)^{\frac{2}{3}} i$ خارج این دایره باشد.

۶) یک ردیف از دو طرف نامتناهی از مربعها را براساس اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ شماره گذاری می کنیم. فرض کنید در ابتدا در هر خانه با شماره منفی یک مهره قرار گرفته باشد. برای یک عدد ثابت صحیح مثبت k حرکات مجاز عبارتند از انتخاب k خانه متوالی حذف یک مهره و دوباره مرتب کردن مهره‌های باقیمانده در k خانه انتخاب شده. هدف آنست که مهره‌ای را به خانه N-ام در قسمت خانه‌های مثبت برسانیم. ثابت یا رد کنید: عدد صحیح $N = N(k)$ وجود دارد که با هیچ دنباله‌ای از حرکات ذکر شده نمی توان مهره‌ای را به خانه N-ام رساند.

بسمه تعالی

مسابقه ریاضی دانشجویی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ: ۱۳۸۵/۱۱/۲۶ مدت امتحان: ۴ ساعت

۱) فرض کنید $A=(a_{ij})$ یک ماتریس حقیقی متقارن خود توان $n\times n$ $(n\geq 2)$ باشد.
ثابت کنید:

$$0\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\leq n$$

۲) فرض کنید $(H,<,>)$ یک فضای ضرب داخلی نامتناهی البعد باشد. S را کره واحد در H یعنی مجموعه $\{u\in H \mid <u,u>=1\}$ بگیرید. ثابت کنید اگر متناهی گوی بسته S را بپوشانند، آنگاه این گویها مبدأ را نیز می‌پوشانند.

۳) $\wp_n$ را مجموعه همه زیرمجموعه‌های $\{1,2,\dots,n\}$ بگیرید.
فرض کنید $c(n,m)$ تعداد توابع $f:\wp_n\longrightarrow\{1,2,\dots,m\}$ باشد طوریکه $f(A\cap B)=min\{f(A),f(B)\}$؛ ثابت کنید $c(n,m)=\sum_{j=1}^{m} j^n$.

۴) اگر G گروهی از مرتبه $n>1$ باشد، ثابت کنید: $|AutG|\leq \prod_{i=0}^{k}(n-2^i)$
که در آن $k=\lfloor log_2(n-1)\rfloor$.

۵) فرض کنید A یک گروه آبلی متناهی و $\gamma: A\times A\longrightarrow Q/\mathbb{Z}$ نگاشتی دوخطی، پادمتقارن و ناتبهگون باشد. نشان دهید مرتبه A مربع کامل است.

(تعریف پادمتقارن : $\forall a\in A \quad \gamma(a,a)=0$
تعریف ناتبهگون : $(\forall x\in A \quad \gamma(a,x)=0)\Longrightarrow a=0$)

۶) فرض کنید $r:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ دوران حول مبدأ با زاویه‌ای برابر مضرب گنگی از π باشد.
تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x,y)=\begin{cases}(x,y) & x\leq 1\\ (2-x,y) & x>1\end{cases}$$

آیا می‌توان $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ یافت طوریکه برای هر $k\in\mathbb{Z}$

$$\|(rof)^k(x_0,y_0)\|>1$$