مسابقه ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

وقت : ۴ ساعت (روز اول ۸۰/۱۲/۱)

۱. برای هر $n \geq 1$ چند جمله‌ای مانند $f(x)$ از درجه n و با ضرا ئب حقیقی بسازید به طوری که به شکل $c(x-a)^n$ نباشد و همه ریشه های $f(x)$ و $f'(x)$ صحیح باشند.

۲. نقطه $i \in \{1, \ldots, n\}$ را یک نقطه ثابت جایگشت $\sigma \in S_n$ گوئیم هرگاه $\sigma(i) = i$. اگر a_n تعداد جایگشتهای بدون نقطه ثابت و b_n تعداد جایگشتهای با دقیقاً یک نقطه ثابت باشد نشان دهید $|a_n - b_n| = 1$.

۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر بوده و مشتق دوم آن پیوسته باشد. بعلاوه فرض کنید برای هر $s, t \in \mathbb{R}$ با شرط $s < t$ داشته باشیم؛ $\frac{1}{t-s}\int_s^t f(x)dx = \frac{f(s)+f(t)}{2}$. ثابت کنید ثابتهای β و α وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم؛ $f(x) = \alpha x + \beta$.

۴. فرض کنید $n \geq 3$. بعلاوه فرض کنید $A_1, \ldots, A_n$؛ ماتریسهایی مربعی از مرتبه n باشند به طوری که $A_1 \cdots A_n = I$ و $detA_1 = \cdots = detA_n = 1$ و ماتریسهای $A_1 - A_k$ برای هر k ؛ $2 \leq k \leq n-1$ اسکالر و ناصفر و متمایز باشند. ثابت کنید $A_1 + (-1)^n A_n$ نیز ماتریسی اسکالر است.

۵. فرض کنید G گروهی نابدیهی (نه لزوماً متناهی) باشد به طوری که برای هر دو زیر گروه H و K از G داشته باشیم $H \subseteq K$ یا $K \subseteq H$.

الف) ثابت کنید G آبلی است و عدد اولی مانند p موجود است به طوری که مرتبه هر عنصر G توانی از p است.

ب) برای هر $n \geq 1$ قرار می دهیم: $G_n = \{g \in G | g^{p^n} = e\}$. ثابت کنید $|G_n| \leq p^n$.

۶. فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$؛ $a_n > 0$. ثابت کنید اگر سری Σa_n همگرا باشد در این صورت دنباله حقیقی صعودی $\{\lambda_n\}$ با شرط $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ وجود دارد به طوری که $\Sigma \lambda_n a_n$ همگرا باشد.

مسابقه ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

وقت : ۴ ساعت (روز دوم ۸۰/۱۲/۲)

۱. فرض کنید $f:[0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ تابعی پیوسته باشد به طوری که $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lambda<1$. ثابت کنید انتگرال $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ همگرا است.

۲. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. اگر برای هر $n\geq 1$؛ داشته باشیم: $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1+\frac{1}{n^2}$ و دنباله $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ به سمت ۱ میل نکند؛ ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

۳. فرض کنید F میدانی باشد که در آن $1+1\neq 0$ و $A,B\in M_n(F)$. اگر B ماتریسی وارون پذیر و متقارن باشد و برای هر $Y\in F^n$ و X؛ رابطه $Y=AX$ نتیجه دهد $Y^tBY=X^tBX$؛ ثابت کنید $detA\in\{-1,+1\}$.

۴. فرض کنید G گروهی متناهی باشد. گوئیم زیر گروه M از G دارای خاصیت $(*)$ است هرگاه M ماکسیمال؛ غیر نرمال و جابجایی باشد.

(الف) اگر N و M دو زیر گروه متمایز G و هر دو دارای خاصیت $(*)$ باشند؛ ثابت کنید $M\cap N=Z(G)$؛ که در آن $Z(G)$ مجموعه تمام عناصری از G است که با تمام اعضای G جابجا می شوند.

(ب) نشان دهید دو زیر گروه G که دارای خاصیت $(*)$ باشند با یکدیگر در G مزدوجند.

۵. اگر $\omega_1,\dots,\omega_n$ کلیه ریشه‌های n- ام واحد باشند؛ نشان دهید: $\Sigma_{j<k}|\omega_j-\omega_k|^{-2}=n(n^2-1)/24$.

۶. فرض کنید S مجموعه‌ای متشکل از m زوج مرتب (a,b) باشد به طوری که a,b اعدادی صحیحند و $1\leq a<b\leq n$. اگر k تعداد سه تاییهای مرتب (a,b,c) باشد به طوری که هر سه زوج $(a,b),(a,c),(b,c)$ متعلق به S باشند؛ نشان دهید: $k\geq\frac{4m}{3n}(m-n^2/4)$.