

مسائل مسابقه دانشجویی دانشکده علوم ریاضی

هر مسئله ۱۰ نمره دارد. مدت امتحان: ۳ ساعت

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{4} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

(۱) ماتریس معکوس را بیابید که ریشه پنجاهم آن ماتریس زیر باشد:

(۲) تابع مستقیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با شرایط زیر داده شده است:

$$f'(x) > f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0$$

ثابت کنید که برای هم‌تعداد مثبت x داریم: $f(x) > 0$

(۳) فرض کنید n تیم ورزشی در یک تورنمنت شرکت کرده‌اند. یعنی هر دو تیم با هم یکبار مسابقه داده‌اند و نتیجه حتماً به برد یکی از تیم‌ها و باخت دیگری منجر شده است (نتیجه صیقلیت مساوی نبوده است). ثابت کنید که نتیجه بازی‌ها هر چه باشد می‌توان

تیم‌ها را به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_n

مرتب کرد بطوریکه x_1 از x_2 ، x_2 از x_3 ، ... و x_{n-1} از x_n برد کند.

(۴) فرض کنید S مجموعه توابع f از \mathbb{R} به \mathbb{R} باشد که هر یک از این توابع مستقیم‌با

$$\text{منفی پیوسته است و } f(0) = f(1) = 0$$

ثابتان دهی عددی λ وجود دارد که برای هر $f \in S$:

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \leq \lambda \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

