



مسابقه ریاضی دانشجویی  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی  
موضوع امتحان: آنالیز

مدت امتحان : ۲ ساعت

تاریخ: ۸۳/۱۱/۲۸

بارم هر سؤال ۱۰ نمره است.

سؤال ۱) فرض کنید  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند. شرطی لازم و کافی بر حسب  $m$  و  $n$  پیدا کنید که چند جمله‌ای مانند  $f$  با ضرایب حقیقی چنان موجود باشد که  $f$  دارای دقیقاً  $m$  ریشه حقیقی و  $f'$  دارای دقیقاً  $n$  ریشه حقیقی باشد (تعداد ریشه‌ها با احتساب تکرار است).

سؤال ۲) مثالی از یک تابع حقیقی و مشتق‌پذیر با دامنه  $[0, 1]$  ارائه کنید که مشتق آن در نا شمارا نقطه دارای ناپیوستگی باشد.

سؤال ۳) فرض کنید  $p(z)$  یک چند جمله‌ای با ضرایب مختلط باشد با این ویژگی که تمام ریشه‌های آن در گوی باز واحد قرار داشته باشند. قرار دهید  $\overline{p(\frac{1}{z})} = z^n p^*(z)$  که  $n \geq 1$  درجه  $p$  است. ثابت کنید ریشه‌های چند جمله‌ای  $p(z) + p^*(z)$  در گوی بسته واحد قرار دارند.