مسابقه ریاضی دانشجویی
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

موضوع امتحان: آنالیز عددی

مدت امتحان : ۲ ساعت

تاریخ: ۸۳/۱۱/۲۹

بارم هر سؤال ۱۰ نمره است.

سؤال ۱) فرض کنید $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از چندجمله‌ای‌های متعامدِ یکه نسبت به تابع وزن $\omega > 0$ روی بازهٔ $[a, b]$ باشد (یعنی $\int_a^b p_i(x)p_j(x)\omega(x)dx$ برابر باشد با ۱ اگر $i = j$ و برابر باشد با صفر اگر $i \neq j$). فرض کنید

$$l_{kn}(x) = \frac{p_n(x)}{p'_n(x_{kn})(x - x_{kn})} \in \Pi_{n-1}$$

که در آن $x_{1n} < \cdots < x_{nn}$ همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای p_n هستند و Π_{n-1} مجموعهٔ چند جمله‌ای‌های از درجهٔ کوچکتر از یا مساوی با $n - 1$ می‌باشد. ثابت کنید برای هر $p \in \Pi_{2n-1}$ داریم:

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p(x_{kn})\lambda_{kn}$$

که در آن

$$\lambda_{kn} = \int_a^b l_{kn}(x)\omega(x)dx.$$

همچنین ثابت کنید

$$x_{1n} = \max_{p \in \Pi_{n-1}} \frac{\int_a^b xp^2(x)\omega(x)dx}{\int_a^b p^2(x)\omega(x)dx}.$$

سؤال ۲) فرض کنید $l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$ $(1 \leq i \leq n)$ که در آن $-1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n \leq 1$.
تابع لبگ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\Lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} |l_i(x)|.$$

ثابت کنید که Λ روی هر یک از بازه‌های $[-1, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, 1]$ دارای ماکزیمم موضعی منحصر به‌فرد است.

سؤال ۳) فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته روی بازهٔ $[a, b]$ باشد که در آن $0 < a < b < 1$. ثابت کنید یک دنباله از چندجمله‌ای‌های p_n با ضرایب صحیح موجودند که بطور یکنواخت (روی $[a, b]$) به تابع f همگرا هستند.